TRANSFORMATIONS

Exercice 1

ABCD est un parallélogramme de centre O. La parallèle à la droite (BD) passant par A coupe la parallèle à la droite (AC), passant par D, en E.

Quels sont les transformés des points A et D par la translation de vecteur $\overrightarrow{EC}$.

Exercice 2

Sur un cercle ($\mathcal{C}$) de centre, on considère quatre points A, B, C et D tels que les droites (AB) et (CD) se coupe en I.
E, F, G et H sont les points diamétralement opposés respectivement à A, B, C et D.
Soit J le point d'intersection de (EF) et (GH).
Démontrer que O, I et J sont alignés.

Exercice 3

Dans le plan orienté, Δ est une droite ; A et B deux points distincts n'appartenant pas à Δ.

On note h l'homothétie de centre A et de rapport 2, r la rotation centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\vec{AB}$.

1. Construire les droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ images respectives de Δ par h, r, t.
2. Démontrer que Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires et que Δ_1 et Δ_3 sont parallèles.

Exercice 4

Soit f l'application du plan dans lui-même définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 3 \end{cases}$

1. Déterminer la nature et le (s) élément(s) caractéristique (s) de f.
2. Déterminer une équation de l'image par f de la courbe ($\mathcal{C}$) d'équation : $y = x^2$

Exercice 5

1. Soit ($\mathcal{D}$) la droite d'équation $x + 2y - 3 = 0$. Représenter ($\mathcal{D}$).
2. Soit $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées (2 ; 1).
   a) Définir analytiquement la translation t de vecteur $\vec{u}$.
   b) Déterminer une équation de la droite ($\mathcal{D}'$) image de ($\mathcal{D}$) par la translation t. Tracer ($\mathcal{D}'$).
3. Soit f l'application du plan dans lui-même définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = -x - 2 \\ y' = -y + 6 \end{cases}$
4. a) Déterminer la nature et l'élément caractéristique de f.
   b) Déterminer une équation de la droite ($\mathcal{D}''$) image de ($\mathcal{D}'$) par f. Tracer ($\mathcal{D}''$).

Exercice 6

Soit f l'application du plan dans lui-même définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = 2x - 3 \\ y' = y + 3 \end{cases}$

Déterminer, s'ils existent, les points invariants par f. L'application f est-elle une translation ? une homothétie ? une réflexion ?

Exercice 7

Soit A et B deux points du plan et M un point du cercle (C) de diamètre [AB].
Soit P le symétrique de B par rapport à M et Q le milieu de [AP].

1. Lorsque M décrit (C), déterminer et représenter :
   a) l'ensemble des points P.
   b) l'ensemble des points Q.
2. Montrer que $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. Retrouver ainsi l'ensemble des points Q.

Exercice 8

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$.On pose BC = a ; CA = b et AB = c.

On suppose que c < b .On note (C) le cercle circonscrit au triangle ABC. La médiatrice de [BC] coupe (C) en deux points I et J tels que I et A soit sur le même arc BC du cercle (C).

1) Faire une figure
2) Soit P barycentre des points pondérés (A ; c) , (B ; b – c) et Q celui de (A ; b) , (B ; c – b)
   a) Calculer PC et BQ puis placer P et Q en justifiant
   b) Démontrer qu'il existe une rotation r transformant A en P et B en C. Quel est son angle ?
   c) Démontrer de même qu'il existe une rotation r' transformant A en Q et C en B. Quel est son angle ?
3) Montrer que le centre de r est un point de (C) que l'on précisera.

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
On désigne par s et s' les symétries orthogonales d'axe respectives (Δ) et (Δ').
Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $s \circ s'$.

1. (Δ) : $x = 2$ et (Δ') : $x = y$
2. (Δ) : $y = -2$ et (Δ') : $y = 2$
3. (Δ) : $x + 2y = 0$ et (Δ') : $2x - y + 1 = 0$

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

h est l'homothétie de centre Ω(1 ; – 2) et de rapport 2, (C) est le cercle de centre A(3 ; 2) et rayon 2.

Déterminer une équation cartésienne du cercle (C'), image de (C) par l'homothétie h.

Soit h' l'homothétie d'expression analytique : $\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y - 6 \end{cases}$

Démontrer que les transformations h' ∘ h et h ∘ h' sont des homothéties et déterminer leurs expressions analytiques

Soit ABC un triangle isocèle en A.
Les points D, E, F et L sont les milieux respectifs de [BC], [AC], [AB] et [DE].
G et Q sont les points symétriques de D par rapport à C et à B.

Le point H est définie par $\vec{AH} = \frac{3}{2}\vec{AC}$.

La droite (EG) coupe (AB) en K et la droite (AD) coupe (BE) en M.

Soit I le point de (AB) tel que $\vec{KI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

1. Démontrer que les points I, D et H sont alignés (utiliser une translation).
2. Démontrer que les points M, L, F et C sont alignés (utiliser une homothétie).
3. La parallèle à (BC) passant par K coupe (AC) en P.
   Démontrer que les points P, F et Q sont alignés (encore une homothétie !).
4. Soit J le point d'intersection de (KG) et (FP).
   Démontrer que les points J, M et D sont alignés (penser aux réflexions).

Démontrer que la droite (AB) est tangente au cercle ($\mathcal{C}$) en un point K dont on donnera les coordonnées.

<u>Exercice 4</u> : (4 points)
Soit ABC un triangle, A' le milieu du segment [BC] et D un point de la droite (AA') distinct de A et de A'.
Par D, on mène les parallèles à (AB) et à (AC). Elles coupent respectivement (BC) en E et en F.
Montrer que A' est le milieu de [EF].
(*indication* : utiliser l'homothétie de centre A' qui transforme A en D.