INTERVALLES ET CALCUL APPROCHÉ

Exercice 1 : Compléter le tableau suivant :

Distance	La distance de x à -1 est3				
Encadrement		$-3 \leq x \leq +3$			
Valeur absolue			$\lvert x - 3 \rvert < 2$		
Intervalle				$x \in [-2; 3]$	
Représentation graphique					

Exercice 2 : x et y sont deux nombres réels tels que : $-\sqrt{3} \leq x \leq -\sqrt{2}$ et $1 \leq y \leq \sqrt{2}$.

1. Déterminer des encadrements de : $x + y$; $x - y$; xy ; $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{y}$; $\frac{x}{y}$; $\frac{y}{x}$; x^2 ; y^2 ; $x^2 + y^2$.
2. En utilisant les encadrements obtenus précédemment, encadrer : $\frac{x^2 + y^2}{xy}$ et $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.
3. Vérifier que : $\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. Comparer les résultats obtenus au 2. Est-ce contradictoire ?

Exercice 3 :
On verse de l'acide dans un tube à essai de forme cylindrique. Le diamètre de ce tube est compris entre 2,4 cm et 2,5 cm. La hauteur de l'acide versé dans le tube est comprise entre 6,2 cm et 6,3 cm.
On donne $\pi \approx 3{,}14$.

1. Déterminer un encadrement du volume de l'acide versé dans le tube.
2. Quelle est l'amplitude de cet encadrement.

Exercice 4 :
Un cycliste parcourt 50 km en maintenant sa vitesse entre 20 km/h et 50 km/h.
Sachant qu'il est parti à 8 h, peut-on situer l'heure de son arrivée.

Exercice 5 :

1. Un rectangle a une aire de 144 m^2. Démontrer que sa longueur L et sa largeur ℓ vérifient : ℓ $\leq 12 \leq$ L.
2. L'arête d'un cube mesure 9,5 cm à un millimètre près. Calculer une valeur approchée de son volume en donnant la précision de l'approximation.
3. Le diamètre d'une sphère est de 4,8 cm à un millimètre près. Calculer une valeur approchée de son volume en donnant la précision de l'approximation. (On donne $3{,}141 \leq \pi \leq 3{,}142$).

Exercice 6 :

1. On donne : $a = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$. Calculer a à l'aide d'une calculatrice. Donner les arrondis de a d'ordre 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.
2. on donne : $-1{,}2 \leq b \leq 0{,}5$. Donner le meilleur encadrement décimal possible de b^2 et b^3 en ne conservant que deux chiffres après la virgule.

Exercice 7 : Les arrondis d'ordre 2 de : $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont respectivement 1,73 et 2,24.

1. Donner les meilleurs encadrements de $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ que l'on peut obtenir de ces informations.
2. En utilisant les encadrements de $3\sqrt{5}+1$ et $5\sqrt{3}+1$, comparer ces deux nombres.

Exercice 8 : Comparer les nombres réels a et b tels que :
a = 2 000 (1 + 2 +…+ 1 998 + 1 999) et b = 1 999 (1 + 2 +…+ 1 999 + 2 000).

Exercice 9

1. A la fin du 16^{e} siècle, Adrian Anthonisz établit l'encadrement suivant de π :

$$\frac{333}{106} < \pi < \frac{377}{120} \qquad (1)$$

a) Quel encadrement décimal de π peut-on en déduire en ne conservant que quatre chiffres après la virgule ?
b) Quel est l'amplitude de l'encadrement (1) et celle de l'encadrement décimal obtenu en a) ?
c) Déduire des calculs précédents une valeur décimale approchée de π à 10^{-4} prés.

3. De l'encadrement (1) Adrian Anthonisz déduit une valeur approchée rationnelle de π en prenant pour numérateur la moyenne arithmétique des numérateurs et pour dénominateur la moyenne arithmétique des dénominateurs.

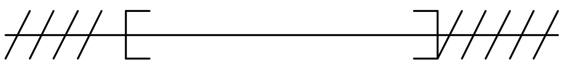
a) Calculer cette valeur approchée et donner une la précision de cette approximation. Est-ce une valeur approchée par excès ou par défaut ? Comparer ces résultats à ceux obtenus en prenant pour valeur approchée de π la demi-somme des bornes de l'encadrement (1).
b) Montrer que si a, b, c et d sont quatre réels strictement positifs tels que : $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ alors

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Exercice 1 :
Déterminer le centre et le rayon de chacun des intervalles suivants :
$[-3,3]$; $[1,8]$; $[-0.3,0.1]$; ; $[\sqrt{2},1]$; $[-\sqrt{2},1]$; $[-5,-7]$

Exercice 2 :
Voici 5 façons d'écrire une même propriété :

- $x \in [1,3]$: en terme d'intervalle
- $1 \le x \le 3$: en terme d'encadrement
- $|x-2| \le 1$: en terme de valeur absolue
- $d(x,2) \le 1$: en terme de distance
- Par une représentation graphique :



Traduire pour chaque façon les propriétés suivantes :
a) $x \in [3,7]$; b) $-6 \le x \le -2$; c) $|x+2| < -2$; d) $|3-x| < 4$; e) $-5 < x < 5$;
f) $x \in [1,5]$; g) $d(x,4) \le 0,5$; h) $x \in [-7,1]$; i) $d(x,1) < 2$

Exercice :
Représenter géométriquement et écrire sous forme d'intervalles ou de réunions d'intervalles l'ensemble des nombres réels x tels que :

a) $|x-1| \le 3$; b) $|2x-1| > 3$; c) $|x| > 3$; d) $|x-2| \le -\frac{1}{2}$; e) $1 < |3x-1| \le 3$

Exercice :
Caractériser par une inégalité du type $|x-a| \le r$ ou $|x-a| \ge r$; $|x-a| < r$ ou $|x-a| > r$
$I_1 = [-1,3]$; $I_2 =]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$; $I_3 =]-5,-2[$; $I_4 =]-\infty,-5] \cup [-2,+\infty[$

Exercice :
Résoudre dans ° les systèmes suivants à l'aide d'un schéma :

1°) $\begin{cases}|x-4|\le 3\\ |x-2|\le 4\end{cases}$; 2°) $\begin{cases}|x-1|\ge 2\\ x\ge 0\end{cases}$; 3° $\begin{cases}|x|<5\\ \left|x-\dfrac{5}{2}\right|\le 3\end{cases}$; 4° $\begin{cases}|x+1|\le 3\\ |x-3|>\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Exercice

Pour chacun des cas suivants, déterminer un encadrement le plus précis possible du réel x :

1°) 2,18 est une valeur approchée de x avec l'incertitude 5×10^{-2}.

2°) 11,27 est une valeur approchée par défaut de x avec l'incertitude 3×10^{-2}.

3°) 125,112 est une valeur approchée par excès de x avec l'incertitude 7×10^{-3}.

Exercice :

Pour chacun des encadrements du réel x suivants déterminer :

a) une valeur approchée a avec deux décimales de x et une incertitude associée ;
b) une valeur approchée par défaut b avec deux décimales de x et une incertitude associée
c) une valeur approchée par excès c avec trois décimales de x et une incertitude associée.

1° $27,2142<x<27,2156$; 2° $0,8131<x<0,8152$; 3° $-216,8937<x<-216,8911$; 4° $-41,0101<x<-41,0077$

Exercice :

$73,47$ est une valeur approchée de x avec une incertitude de 8×10^{-2} et $73,43$ est une valeur approchée de y avec une incertitude de 5×10^{-2}. Peut-on comparer les réels x et y ?

Exercice :

Soit les réels x et y dont les valeurs approchées sont 1,5 et 2,7 avec les incertitudes ε et 2×10^{-1}. On note $\beta=\varepsilon+2\times 10^{-1}$.

1° Déterminer des encadrements des réels $x+y$, $y-x$, $\dfrac{x+y}{y-x}$, et $\left(\dfrac{x+y}{y-x}-3,5\right)$ en fonction de β

2° Quel est le signe du réel d tel que $d=\dfrac{4,5\beta}{1,2-\beta}-\dfrac{4,5\beta}{1,2+\beta}$?

3° Quelles conditions doit vérifier β pour que 3,5 soit une valeur approchée de $\dfrac{x+y}{y-x}$ avec une incertitude de 9×10^{-1} ? En déduire les valeurs possibles de ε.

Exercice :

On suppose que 3 est une valeur approchée du réel strictement positif x avec une incertitude ε.

Déterminer ε, suivant les valeurs du réel strictement positif m, pour que $\dfrac{1}{3}$ soit une valeur approchée de $\dfrac{1}{x}$ avec une incertitude de $m\,\varepsilon$.

Exercice :

3,24 est une valeur approchée de a avec une incertitude de 2×10^{-2} ; 1,17 est une valeur approchée de b avec une incertitude de 10^{-2}.

1) Déterminer des valeurs approchées avec deux décimales des réels a^2, b^2, a^2-b^2, a^2+b^2, a^4, b^4 en précisant les incertitudes associées.

2) Déterminer des valeurs approchées de $x=a^4-b^4$ et $y=\left(a^2-b^2\right)\times\left(a^2+b^2\right)$.

Conclusion ?

Exercice :

Déterminer $E\cap F$ et $E\cup F$ dans chacun des cas suivants :

a) $E=\left\{x\in{}^\circ\ /|x-3|<2\right\}$, $F=\left\{x\in{}^\circ\ /|x-2|\le 2\right\}$;

b) $E=\left\{x\in{}^\circ\ /|x|<5\right\}$, $E=\left\{x\in{}^\circ\ /|x|>3\right\}$.

Exercice :

Ecrire à l'aide d'intervalles les ensembles :

a) $A=\left\{x\in{}^\circ\ /|x-2|<0,5\right\}$,

b) $B=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\left|2x-5\right|\leq 7\right\}$,

c) $C=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\left|2x+1\right|>5\right\}$,

d) $D=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\left|x-2\right|<3\right\}\cap\left\{x\in\mathbb{R}\ /\left|2x+1\right|>5\right\}$.

Exercice :

Soit $a>0$ et $b>0$. On pose $E=\dfrac{12a+10b}{3a+2b}$. Démontrer que $4<E<5$.

Exercice :

Soit $x>0$ et $y<0$. On pose $Z=\dfrac{9x-4y}{3x-2y}$. Démontrer que $2<Z<3$.

Exercice :

On considère quatre réels strictement *a*, *b*, *c* et *d* tels que $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$.

a. Démontrer que $bc-ad>0$.

b. Démontrer que $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$.

c. En s'inspirant de ce qui précède, trouver une fraction comprise entre $\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{3}{4}$.

Exercice :

$E_1=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\left|x-1\right|\leq 2\ et\ \left|2-x\right|\leq 2\right\}$; $E_2=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\left|x+1\right|\geq 4\ et\ \left|x-1\right|>1\right\}$. Expliciter E_1 et E_2 à l'aide d'intervalles.

Exercice :

Soit *A* un réel tel que $1,589\leq A\leq 1,59$. Donner une approximation du réel A, puis une approximation par défaut, et enfin une approximation par excès en indiquant à chaque fois la précision.

Exercice :

On sait que 12,37 est une valeur approchée de *x* par défaut à 10^{-2} près ; 12,39 est une valeur approchée de *y* par excès à 10^{-2}. Comparer *x* et *y*.

Exercice :

I) $J=\left[0,1258;0,1264\right]$. Exprimer l'appartenance du réel *x* à l'intervalle *J* par une condition faisant intervenir la valeur absolue puis en langage d'approximation.

II) Traduire l'approximation donnée par un encadrement de *x*.

- ♦ 5,624 approche *x* à 10^{-3} près.
- ♦ 62,94 approche *x* par excès à 5.10^{-3} près.
- ♦ 7,286 approche *x* par défaut à 10^{-3} près.

Exercice :

Ecrire, à l'aide de valeur absolue, puis en terme de distance les inégalités $1\leq x\leq 6$; $-5<x<-3$; $x<2$ ou $x>5$.

Exercice :

Soit *a* et *b* deux nombres réels tels que : $1,73\leq a\leq 1,75$ et $1,46\leq b\leq 1,50$.

Donner un encadrement pour chacun des nombres : $-2a+5$; b^2 ; b^2-2a+5 ; $a-b$; $\dfrac{a}{b}$.

Exercice :

Soient *a* et *b* deux nombres réels tels que : $4\leq a\leq 4,1$ et $-0,5\leq b\leq 0,3$. Donner un encadrement de *ab*.

Exercice

La longueur *L* d'une planche et de 1,246 m à 1 mm près et sa largeur *l* est de 0,242 m à 1 mm près.

Donner un encadrement des valeurs de L et de *l*.

Donner un encadrement de l'aire de la planche.