Exercice 1

1. Simplifier le maximum les nombres suivants :

$A = -7\sqrt{3}+3\sqrt{3}-\sqrt{3}$; $B = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}$

$C = \dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$; $D = \dfrac{3\sqrt{18}-4\sqrt{18}+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+\sqrt{12}}$

2. Ecrire les nombres F et G ci-contre sous la forme $a\sqrt{3}$ où a est un entier: $F = 3\sqrt{27}-\sqrt{108}$; $G = 2\sqrt{75}-3\sqrt{48}$

3. Développer et réduire : $H = (3-\sqrt{5})^2$

Exercice 2

On donne $A = \sqrt{7}-1$ et $B = \sqrt{7}+1$

Calculer A², AB et $\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}$

Exercice 3

1. Soit $A = \sqrt{11-4\sqrt{7}}+\sqrt{43-12\sqrt{7}}$ Montrer que A = 4

2. Soit n un entier naturel et $B = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

a) Montrer que $B=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$

b) En déduire que $1\le B\le 2\sqrt{n+1}$

Exercice 4

1. Soit $A = \sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}$; Calculer A^2 et déduire A

2. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}<\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) Déterminer l'inverse de $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

c) En déduire que $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}<\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 5

Soit : $A = 1+\sqrt{3}$; $B = 2-\sqrt{5}$ et $C = \dfrac{1+3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+10}$

1. a) Calculer A^2 et B^2

b) Simplifier alors de $E = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$ et $F = \sqrt{9-4\sqrt{5}}$

2. a) Simplifier l'expression C

b) Montrer que C et l'inverse de A.

3. Simplifier l'expression : $D = \dfrac{(4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2}$

Et montrer que $\dfrac{4-2\sqrt{5}}{\sqrt{9-4\sqrt{5}}}$ est un entier.

Exercice 6

1. On donne $x = 6-2\sqrt{5}$ et $y = 7+4\sqrt{3}$

a) Ecrire x et y sous forme $(a+b)^2$ ou $(a-b)^2$

b) Calculer $\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{y}}$

2. Factoriser les expressions suivantes : $A = 2x^3-16$

$B = 4x^2-(1+x^2)^2$ et $C = x^3+6x^2+12x+8$.

2. Simplifier: $E = \dfrac{A}{x^2+2x+4}$; $F = \dfrac{2C}{(x+2)^2}$ et $G = E - F$

Exercice 7

1. Soit $x \ge 2$; Montrer que :

$\dfrac{1}{x+1}\le\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{-3}{x-1}\ge -3$ et $\dfrac{5}{-x-3}\ge -1$ et $\dfrac{-3}{\sqrt{x+7}}\ge -1$

2. Soit $3\le x<5$.

Montrer que : $3<\dfrac{24}{x+3}\le 4$ et $1\le\dfrac{3}{6-x}<3$

Exercice 8

Soit $A = \dfrac{2x+1}{x-1}$ pour $x \neq 1$

1. Calculer A pour x = 0 puis pour x = 2.

2. Montrer que $A = 2+\dfrac{3}{x-1}$

3. Pour $x \in [2,4[$; Montrer que : $A \in]3,5]$

Exercice 9

Soit $A = \dfrac{x+1}{x+3}$ pour $x \neq -3$

1. Calculer A pour x = – 1 puis pour x = – 4.

2. Montrer que: $A = 1 - \frac{2}{x+1}$

3. a) Pour $x \in]1,3]$; Montrer que : $\frac{x+1}{6} < A \leq \frac{x+1}{4}$

b) Pour $x \in]1,3]$; Montrer que : $2A \in [0,1[$

Exercice 10

1) Soit $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

a) Vérifier que $a^2 + a - 1 = 0$ et que $\frac{1}{a} = a + 1$

b) Montrer alors que $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}} + \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} = \sqrt{5}$

2) Soit $A = x^2 - 25 + 4(x + 5)$

a) Factoriser A

b) Calculer A pour $x = -\sqrt{3} - 1$

c) Trouver les réels x pour que A = 0

3) Soit $B = \sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}}$

a) Calculer B^2

b) Déduire la valeur exacte de B

4) a) Développer $(x-2\sqrt{3})^2$

b) Donner une écriture plus simple de $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

c) Chercher le réel x tel que $x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 4 = -4 + 2\sqrt{3}$

Exercice 11

1. Soit $A = (2x+1)^2 - (x-5)^2$

a) Développer puis simplifier A

b) Factoriser A

c) Calculer A pour $x = -6$

2. Factoriser : $B = x^3 + 8 + (x + 2)(3x - 5)$

Et $C = x^3 - 8 + (x-2)(3x + 5)$

3. Soient a et b deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$

a) Montrer que $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2$

b) Montrer que $a^6 + b^6 + 3a^2b^2 = 1$

Exercice 12

Soit $A = (2x-3)^2 - (3x + 1)(2x - 3)$ et $B = 4x^2 - 9$

1. Calculer A et B pour $x = -1$ puis pour $x = 2$

2. Factoriser A ; B ; A + B ; A – B.

3. Développer A

Exercice 13

1. Développer et simplifier $A = (x + 1)^3 - x(x - 2)^2$

2. Factoriser $B = x^3 - 27 + 2(x - 3)(x + 1)$

$C = (x - 2)^2 - 4(x + 1)^2$

3. Soient a et b deux réels positifs tels que :

$a^2 + b^2 = 8$ et $a + b = 2\sqrt{3}$

a) Montrer que $ab = 2$

b) Sans calculer a et b, calculer $a^4 + b^4$.

Exercice 14

Soit $F(x) = x^2 - 4x - 5$.

1. a) Montrer que $F(x) = (x - 2)^2 - 9$

b) Factoriser alors F(x) et déduire les valeurs du réels x tel que F(x) = 0

2. Soit $G(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 16$

a) Développer $(x - 2)^3$ et déduire que $G(x)= (x - 2)^3 - 8$

b) Factoriser alors G(x).

3. Soit $H(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

a) Vérifier que $H(x) = G(x) - F(x) - 1$

b) Factoriser alors H(x)

c) Déduire le valeur de x tel que H(x) = 0

Exercice 15

1. Développer puis simplifier

$A= (2x+1)^2 + (2x-1)^2 - (x\sqrt{3} + 1)(x\sqrt{3} - 1)$

2. Factoriser $B = (3x+1)^2 - (x - 1)^2$

3. Résoudre dans R

a) $3|2x - 3| - 5 = 0$ b) $|-x - 3| - |1 - x| = 0$

c) $|2x + 2| < 2$ d) $|3x - 1| \geq 3$